# TD3 : Intégration

## Intégrales et primitives

### Exercice 1

Déterminer une primitive des fonctions suivantes.

1. $x \mapsto x$
2. $x \mapsto 1$
3. $x \mapsto 2x$
4. $x \mapsto 3x$
5. $x \mapsto x - 1$
6. $x \mapsto e^x$
7. $x \mapsto e^x + 1$
8. $x \mapsto \frac{1}{x}$
9. $x \mapsto \frac{1}{x+1}$
10. $x \mapsto \sin(x) + 1$
11. $x \mapsto \frac{2}{x+1}$
12. $x \mapsto \frac{2x}{x^2+1}$
13. $x \mapsto \tan(x)$
14. $x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$
15. $x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sqrt{\sin(x)+2}}$
16. $x \mapsto \frac{\cos(x)}{\sin(x)+2}$
17. $x \mapsto \frac{e^x}{e^x+1}$
18. $x \mapsto 2xe^{x^2}$
19. $x \mapsto \cos^2(x)$
20. $x \mapsto \sin^2(x)$
21. $x \mapsto xe^{x^2}$
22. $x \mapsto \sin(x)e^{\cos(x)}$

### Exercice 2

Calculer les intégrales suivantes.

1. $\int_{-1}^{1} x^5 \, dx$
2. $\int_{0}^{3} x^2 + 1 \, dx$
3. $\int_{-2}^{-1} (x+1)^2 \, dx$
4. $\int_{5}^{3} 2x + 1 \, dx$
5. $\int_{1}^{e} \frac{1}{x} \, dx$
6. $\int_{-1}^{1} 2xe^{x^2+1} \, dx$
7. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(x) \, dx$
8. $\int_{-\pi}^{\pi} \sin(x) \, dx$
9. $\int_{0}^{1} \frac{1}{x+1} \, dx$
10. $\int_{-3}^{3} e^{3x+1} \, dx$
11. $\int_{0}^{1} xe^{x^2+x} + \frac{1}{2}e^{x^2+x} \, dx$
12. $\int_{-\ln(2)}^{\ln(3)} (1 - 2e^{-t}) \, dx$
13. $\int_{1}^{2} \frac{1}{2\sqrt{x}} \, dx$
14. $\int_{0}^{1} \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}} \, dt$
15. $\int_{e}^{e^2} \frac{1}{x\ln(x)} \, dx$
16. $\int_{1}^{e} \frac{\ln(x)}{x} \, dx$
17. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(x)} \, dx$

## Exercice 3

Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration par partie.

1. $\displaystyle\int_0^1 xe^{-x}\, dx$
2. $\displaystyle\int_1^e x\ln(x)\, dx$
3. $\displaystyle\int_1^2 \ln(x)\, dx$
4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\sin(2x)\, dx$
5. $\displaystyle\int_0^1 (1-2x^2)e^{-x}\, dx$
6. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2\cos(3x)\, dx$
7. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{3x}\sin(x)\, dx$

## Exercice 4

On pose $I = \displaystyle\int_1^{e^\pi} \sin(\ln(x))\, dx$ et $J = \displaystyle\int_1^{e^\pi} \cos(\ln(x))\, dx$.

1. En intégrant par partie I déterminer la valeur de $I + J$.
2. En intégrant par partie J déterminer la valeur de $I - J$.
3. En déduire la valeur de I et de J.

## Exercice 5

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la suite $(I_n)_n$ définie par $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(x)\, dx$.

1. Calculer $I_0$ et $I_1$.
2. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \dfrac{n-1}{2} I_{n-2}$
3. En déduire les valeurs de $I_{2k}$ et $I_{2k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

## Exercice 6

On considère $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x)}{\cos(x)+\sin(x)}\, dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x)}{\cos(x)+\sin(x)}\, dx$.

1. Calculer $I + J$.
2. Calculer $I - J$.
3. En déduire la valeur de I et J.

## Exercice 7

On considère $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2(x)}\, dx$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4(x)}\, dx$.

1. Rappeler la dérivé de la fonction tangente et en déduire la valeur de I.
2. On considère la fonction $f : \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{\cos^3(x)}$.
   (a) Calculer la dérivé $f'$ de f.
   (b) En déduire une relation entre I et J puis donner la valeur de J.